PART2 おき換え，はさみうちによる三角関数の極限

要点整理と公式

要点① おき換えによる三角関数の極限

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使える形に変形するために，おき換えが有効な場合がある。

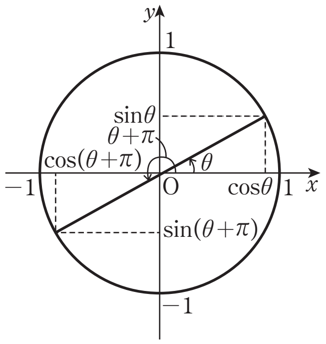
(ex) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

$x-\pi=t$ とおくと　$x\to\pi$ のとき $t\to$

また　$x=$

よって $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to}\frac{\sin(\qquad)}{\qquad}=\lim_{t\to0}\frac{\qquad}{\qquad}$

$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot(-1)=1\cdot(-1)=-1$



要点② はさみうちによる三角関数の極限

関数の極限の性質

> $x=a$ の付近で，つねに $f(x)\leqq h(x)\leqq g(x)$ かつ
>
> $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$ ならば　$\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

を用いて（はさみうちの原理），式変形やおき換えによって求めることが困難な三角関数の極限を求める。

(ex) $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$

$-1\leqq\sin\frac{1}{x}\leqq1$ より

$x>0$ のとき $-x\leqq x\sin\frac{1}{x}\leqq x$　　　$x<0$ のとき $x\leqq x\sin\frac{1}{x}\leqq -x$

$\lim_{x\to0}(-x)=$　，$\lim_{x\to0}x=$　　より　$\lim_{x\to+0}x\sin\frac{1}{x}=$　，$\lim_{x\to-0}x\sin\frac{1}{x}=$

したがって　$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=$

[MEMO]

2 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{3x}$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-\sin x}{x}$

Point Pickup

おき換え，はさみうちによる三角関数の極限

適切な変形やおき換えにより，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使える形にする。

変形によって極限を直接求めることが難しい場合は，はさみうちの原理の利用を検討する。

第 6 講　PART2 確認問題

次の極限を求めよ。

1　$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}\sin\frac{2}{x}=$ ア

2　$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=$ イ

次の極限を求めよ。ただし，ウ，エ は下の①～④のうちから選べ。

3　$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

〔解答〕

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ であるから，$x>0$ のとき，

ウ $\leqq\frac{\sin x}{x}\leqq$ エ

この不等式を利用して極限を求めると，

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=$ オ

①　x　　②　$-x$　　③　$\frac{1}{x}$　　④　$-\frac{1}{x}$

次の極限を求めよ。ただし，[ク]，[ケ] は下の①～④のうちから選べ。

4 $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)$

〔解答〕

$-1 \leqq \cos\dfrac{1}{x} \leqq 1$ であるから，[カ] $\leqq 1-\cos\dfrac{1}{x} \leqq$ [キ]

$x \neq 0$ のとき，[ク] $\leqq x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right) \leqq$ [ケ]

この不等式を利用して極限を求めると，

$$\lim_{x\to 0} x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) = \boxed{\text{コ}}$$

① 0　　② x　　③ x^2　　④ $2x^2$

[MEMO]

PART2 おき換え，はさみうちによる三角関数の極限

2 (1) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{3x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$

(2) 次の極限を求めよ。

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{x}$

[解答]

(1)(i) $\dfrac{1}{3x}=t$ とおくと　$x\to\infty$ のとき $t=+0$

また $x=\dfrac{1}{3t}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{3x}=\lim_{t\to+0}\frac{1}{3t}\sin t=\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{3}=1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと　$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$

また $x=t+\dfrac{\pi}{2}$，$2x-\pi=2t$

よって $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{2t}$

$\displaystyle=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

(2)(i) $-1\leqq\cos\dfrac{1}{x}\leqq 1$ より

$x\neq 0$ のとき $-x^2\leqq x^2\cos\dfrac{1}{x}\leqq x^2$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(-x^2)=0$，　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2=0$ より　$\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(別解)

$0\leqq\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ より $0\leqq|x^2|\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$　　つまり $0\leqq\left|x^2\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x^2|$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}|x^2|=0$ であるから $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|=0$　　したがって $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\cos\frac{1}{x}=0$

(ii)　$-1\leqq\sin x\leqq 1$ より $-1\leqq-\sin x\leqq 1$　　　$0\leqq 1-\sin x\leqq 2$

よって $0\leqq|1-\sin x|\leqq 2$

したがって $x\neq 0$ のとき $0\leqq\left|\dfrac{1}{x}\right||1-\sin x|\leqq 2\left|\dfrac{1}{x}\right|$　つまり $0\leqq\left|\dfrac{1-\sin x}{x}\right|\leqq\left|\dfrac{2}{x}\right|$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{2}{x}\right|=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left|\frac{1-\sin x}{x}\right|=0$　　したがって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{x}=0$

第 6 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1

[解説]

$\dfrac{2}{x}=t$ とおくと，$x \to \infty$ のとき，$t \to 0$ [A]

また，$\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{t}$

よって，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}\sin\frac{2}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\sin t$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

$$=\mathbf{1}$$

[A]　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使えるように，0 に収束する文字に置き換える。

2

[正解] イ：1

[解説]

$x-\pi=t$ とおくと，$x \to \pi$ のとき，$t \to 0$ [B]

また，$x=t+\pi$

よって，

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t+\pi)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}$$ [C]

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}$$

$$=1\cdot\frac{1}{1}$$

$$=\mathbf{1}$$

[B]　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ が使えるように，0 に収束する文字に置き換える。

[C]　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

3

[正解] ウ：④，エ：③，オ：0

[解説]

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから，$x>0$ のとき，

$$-\frac{1}{x} \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq \frac{1}{x}$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であるから，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$ [D]

[D] 関数の極限の性質
$x=a$ の付近で，つねに
$f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$
かつ $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$
ならば，$\displaystyle\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

4

[正解] カ：0，キ：2，ク：①，ケ：④，コ：0

[解説]

$-1 \leqq \cos\dfrac{1}{x} \leqq 1$ であるから，

$$0 \leqq 1-\cos\frac{1}{x} \leqq 2$$

$x \neq 0$ のとき

$$0 \leqq x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right) \leqq 2x^2$$ [E]

[E] $x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ についての不等式を作る。

$\displaystyle\lim_{x\to 0}2x^2=0$ であるから，

$$\lim_{x\to 0}x^2\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)=0$$